Nr. 4 i)

$f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$

Symmetrie

$f(-x) = (-x)^2 \cdot e^{-(-x)} = x^2 \cdot e^{+x} \neq f(x)$

$-f(-x) = -x^2 \cdot e^{x} \neq f(x)$

weder achsensymmetrisch zur y-Achse

noch punktsymmetrisch zum Ursprung

Achsenschnittpunkte

$f(0) = 0^2 \cdot e^{-0} = 0$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot e^{-x} = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = 0$ oder $\underbrace{e^{-x}}_{>0} = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$

$\rightarrow$ Schnittpunkt mit den Achsen $(0/0)$

Verhalten für $x \to \pm\infty$

$\lim\limits_{x \to \infty} \underbrace{x^2}_{\to\infty} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{\to 0} = 0$

also für $x \to +\infty$ waagerechte Asymptote: $y = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \underbrace{x^2}_{\to+\infty} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{\to+\infty} = +\infty$

Ableitungen $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$

$f'(x) = 2x \cdot e^{-x} + x^2 \cdot e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x} \cdot (2x - x^2)$

$f''(x) = e^{-x} \cdot (-1) \cdot (2x - x^2) + e^{-x} \cdot (2 - 2x)$

$= e^{-x} \cdot (x^2 - 2x + 2 - 2x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$

$f'''(x) = e^{-x}(-1) \cdot (x^2 - 4x + 2) + e^{-x} \cdot (2x - 4)$

$= e^{-x} \cdot ((-x^2 + 4x - 2) + (2x - 4))$

$= e^{-x}(-x^2 + 6x - 6)$

Extrema

Notw. Krit $f'(x)=0$

$\Leftrightarrow e^{-x}\cdot(2x-x^2)=0$

$\Leftrightarrow \underbrace{e^{-x}}_{>0}=0$ oder $2x-x^2=0$

$\Leftrightarrow x\cdot(2-x)=0$

$\Leftrightarrow x=0$ oder $2-x=0$

$\Leftrightarrow 2=x$

Hinr. Krit. $f''(x)\gtrless 0$

$f''(0)=e^{-0}\cdot(0^2-4\cdot 0+2)=1\cdot 2=2>0 \Rightarrow TP$

$f''(2)=e^{-2}\cdot(2^2-4\cdot 2+2)=\frac{1}{e^2}\cdot(-2)<0 \Rightarrow HP$

y-Koord.

$f(0)=0^2\cdot e^{-0}=0$ (s.o.), also $TP(0/0)$

$f(2)=2^2\cdot e^{-2}=\frac{4}{e^2}$, also $HP(2/\frac{4}{e^2})$

Wendepunkte

Notw. Krit. $f''(x)=0$

$\Leftrightarrow e^{-x}\cdot(x^2-4x+2)=0$

$\Leftrightarrow \underbrace{e^{-x}}_{>0}=0$ oder $x^2-4x+2=0$

$\Leftrightarrow x_{1,2}=2\pm\sqrt{2^2-2}=2\pm\sqrt{2}$

$x_1=2+\sqrt{2}=3{,}4142\ldots$

$x_2=2-\sqrt{2}=0{,}5857\ldots$

Hinr. Krit. $f'''(x)\neq 0$

$f'''(3{,}4\ldots)=e^{-3{,}41\ldots}\cdot(-(3{,}4142\ldots)^2+6\cdot 3{,}4142\ldots-6)$

$=0{,}09\ldots\neq 0 \Rightarrow WP$

$f'''(0{,}585\ldots)=e^{-0{,}585}\cdot(-(0{,}585\ldots)^2+6\cdot 0{,}585\ldots-6)$

$=-1{,}575\ldots\neq 0\Rightarrow WP$

y-Koordinaten

$f(3{,}4142\ldots)=\ldots=0{,}383$, also $WP(3{,}4142\ldots/0{,}383\ldots)$

$f(0{,}585\ldots)=\ldots=0{,}191$, also $WP(0{,}585\ldots/0{,}191)$